INÉGALITÉS

I- Définitions

Définition — Une **inégalité** est une affirmation fondée sur l'un des signes suivants : $<$; $\leq$; $>$; $\geq$.
Les deux expressions placées de part et d'autre d'un tel signe se nomment les **membres** de l'inégalité.

Inégalités strictes — $a < b$ se lit « a (est) strictement inférieur à b »

« $a < b$ » signifie que <u>a est placé avant b sur l'axe des réels</u>. Et d'ailleurs, nous le lirons parfois « … est avant … ».

Exemples :

$1 < 1{,}5$ est vrai
$-1000 < 0{,}01$ est vrai
$-1 < -2$ est faux.

$a > b$ se lit « a (est) strictement supérieur à b » (et nous le lirons parfois « a est après b »).

$a > b \Leftrightarrow b < a$.

Inégalités larges — $a \leq b$ se lit « a (est) inférieur (ou égal) à b ».

$a \leq b \Leftrightarrow (a < b)$ ou $(a = b)$

Exemple :

$1 \leq 2$ est vrai
$2 \leq 2$ est vrai.

$a \geq b$ se lit « a (est) supérieur (ou égal) à b ».

$a \geq b \Leftrightarrow (a > b)$ ou $(a = b)$

Encadrement — $a < x < b$ est une façon de condenser : $\begin{cases} a < x \\ x < b \end{cases}$

Et on peut le lire : « x est strictement compris entre a et b.
Rappel : l'accolade signifie tout simplement « et », comme dans un système d'équations.

II- Règles élémentaires concernant les inégalités

Transitivité — Si machin est avant bidule et que bidule est avant smurf, alors machin est avant smurf. Plus rigoureusement :

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \; ; \quad \begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \Rightarrow a < c$$

Rappels :

- $\forall a \in \mathbb{R}$ se lit « <u>quel que soit</u> a apparten<u>ant</u> à $\mathbb{R}$ ».
- Nous nous autorisons à écrire « $\forall a,b \in \mathbb{R}$; … » pour condenser l'écriture : « $\forall a \in \mathbb{R}$; $\forall b \in \mathbb{R}$; … »
- Le signe $\Rightarrow$ se lit « **implique** ». Il a le sens d'un « si … alors … ».

Règles de transformation :

Théorème

Pour *transformer* une inégalité, on peut ajouter un même nombre à ses deux membres ou multiplier ses deux membres par un même nombre strictement positif. On peut aussi prendre l'opposé des deux membres, ou multiplier les deux membres par un même nombre strictement négatif, mais alors il faut changer le sens de l'inégalité. Autrement dit :

$$\forall A,B,k \in \mathbb{R} \; ; \quad A < B \Leftrightarrow A + k < B + k$$

$$A < B \Leftrightarrow -A > -B$$

Si $k > 0$: $A < B \Leftrightarrow kA < kB$

Si $k < 0$: $A < B \Leftrightarrow kA > kB$

Remarques

- On peut bien entendu soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité (sans changer son sens), dans la mesure ou soustraire, c'est ajouter l'opposé.
- On peut diviser par un même nombre non nul (et dont on connaît le signe) les deux membres d'une inégalité. Le sens de l'inégalité change si le diviseur en question est strictement négatif.

III- Inéquations

Définitions

> Une **inéquation** est une inégalité contenant une variable. Cette variable est alors parfois appelée l'*inconnue* de l'inéquation.
> Une **solution** d'une inéquation est une valeur de la variable qui rend l'inégalité vraie.
> **Résoudre** une inéquation, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Méthodes de résolution

La méthode de résolution d'une inéquation ressemble à celle des équations. Pour commencer, elle dépend du *degré* de cette inéquation.

Si l'inéquation est de degré 1, on applique les règles de transformations élémentaires de façon à isoler l'inconnue.

Si l'inéquation est de degré 2 (ou plus), on fait tout passer du même côté et l'on factorise au maximum. Ensuite, l'étude du signe d'un produit de facteurs qui dépendent tous d'une même variable est facile à présenter dans un tableau de signes.

Le tableau de signes

Par exemple, si l'on veut résoudre l'inéquation : $(2x+6)(1-x)>0$, on peut établir le tableau suivant :

x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+6)(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

La dernière ligne du tableau indique dans quel cas l'inéquation est vérifiée et l'on peut conclure que l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-3;+1[$. Pour bien comprendre comment fonctionne un tableau de signes, n'hésitez pas à consulter la version complète de ce cours, sur le site *MathEnSeconde*.

IV- Opérations membres à membres

Théorème

> On peut toujours additionner membre à membre deux inégalités (de même sens) :
> $$\forall a,b\in\mathbb{R}\;;\quad \begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow \quad a+a'<b+b'$$

Illustration

On a deux couples (mariés, d'individus « binaires », « cisgenres » et hétérosexuels) au sein de chacun desquels le mari pèse plus lourd que son épouse. Alors le poids total des deux maris est forcément supérieur au poids total de leurs deux épouses.

Démonstration

$$\begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\mathbf{a'}<b+\mathbf{a'} \\ \mathbf{b}+a'<\mathbf{b}+b' \end{cases}$$ En appliquant la première règle élémentaire de transformation des inégalités.

$$\Rightarrow \quad a+a'<b+b'$$ Par transitivité.

Remarques

- Si l'une des inégalités de départ est large et l'autre stricte, alors on obtient encore à l'arrivée une inégalité stricte :
$$\begin{cases} a<b \\ a'\leq b' \end{cases} \Rightarrow \quad a+a'<b+b'$$

- Mais si les deux inégalités de départ sont larges, on obtient une inégalité large.
- Ce théorème présente une implication et non une équivalence.

On ne peut pas soustraire membre à membre deux inégalités.

Contre exemple :

$$\begin{array}{rll} & 3<5 & \text{vrai} \\ - & \underline{1<4} & \text{vrai} \\ & 2<1 & \textbf{faux} \end{array}$$

Théorème

On peut toujours multiplier membre à membre deux inégalités (de même sens) à condition que les membres de ces inégalités soient tous positifs :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}\ ; \quad \begin{cases} 0 \le a < b \\ 0 \le a' < b' \end{cases} \Rightarrow \quad aa' < bb'$$

Démonstration

$$\begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\mathbf{a'} < b\mathbf{a'} \\ \mathbf{b}a' < \mathbf{b}b' \end{cases} \qquad \text{Car } a'>0 \text{ et } b>0$$

$$\Rightarrow \quad aa' < bb' \ \text{ Par transitivité.}$$